

Title	van der Waerden ノ 《ユークリッド幾何學ノ理論的基礎》 カラ
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 158 p.193-p.198
Issue Date	1938-05-03
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74626">https://doi.org/10.18910/74626</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

# 690. van der Waerden / 《ユークリッド 幾何學ノ論理的基礎》カラ

寺 阪 英 孝 (阪大)

Hilbert / 幾何學ノ基礎デハ運動ノ考ヲ入レズニ三  
角形ノ合同ヲ公理トシテキルガ、ユークリッド式ノ重ね合  
ハセル方法モ、運動トイフモノヲ適當ニ公理化セバ、却ッ  
テ有力ニモナリ：教育的デモアルトイフ考カラ van der  
Waerden ハ表題ノ書物デ 移動 ナルモノヲ公理的ニ導  
入シテ合同ヲ取扱ツテキル。ソレガ手際ヨイノヲ公理カケデ  
モ紹介シタクナツタ。尤モ運動ヲ使フトイフノハ Klein /  
Elementarmathematik II ニミアルケレドモ、ス  
ケッチニ違ギナイカラ、ハッキリシタ公理ヲ舉ゲルノモ無駄  
デハアルマイト思フ。

序ニコレカラ自然ニ起ル射影幾何學ノ問題ニツイテハ、  
諸賢ノ御教示ヲ仰ギタイノデ、紙面ヲカリルコトニシタ。

尚 van der Waerden ノ本ハ 87 頁ノ小冊デア  
ルケレドモ脊オテシク良クマトメテアル。

合同ノ公理ハ次ノ通り (v. d. W. 氏ノ本デ I ハ 結合,  
II ハ 順序ノ公理歟、コノデハ III トナツテキル)

III. 1. 移動  $\nu$  ハ 各点  $P$  ヲ唯一点  $Q$  ニ移ス。

III. 2.  $B$  ガ  $A$  ト  $C$  トノ間ニアリ、且ツ  $\nu$  ガ  $A$  トノ移動  
ナラバ  $\nu B$  ハ  $\nu A$  ト  $\nu C$  トノ間ニアル。

III.3.  $B$  が  $A$  と  $C$  との間 = アレバ,  $AC$  に決シテ  $AB$  と合同 = ハナライ。 (即チ  $AC$  上  $AB$  = 移ス移動ハ存在シナイ)

III.4.  $D$  が  $\angle BAC$  の中 = アレバ,  $\angle BAC$  に決シテ  $\angle BAD$  と合同 = ハナライ。

III.5. 各移動  $V$  = 對シ  $V^{-1}$  上ル移動が存在シテ,  $V^{-1}(VP) = P$  とナル。 (即チ  $VP = Q \rightarrow V^{-1}Q = P$ )

III.6. ニツノ移動  $U, V$  = 對シ一ツノ移動  $W$  が存在シテ凡テノ  $P$  = ツキ  $WP = V(U P)$  とナル。 ( $W$  は  $U$  と  $V$  とノ積  $VU$  = 他ナライ。即チ  

$$WP = (VU)P = V(U P)$$
)

最後ノハ少々長イガ

III.7. 與ヘラレタ点  $A$  上他ノ與ヘラレタ点  $A'$  = 移シ、第二ノ與ヘラレタ点  $B$  上與ヘラレタ半直線  $A'B'$  上ノ一点 = 移シ、直線  $AB$  外ノ第三ノ與ヘラレタ点  $C$  上  $A'B'$  ノ指定サレタ側 = 移ス、トイフ新様ノ移動が常ニ存在スル。

以上デ分ル通り (即チ III.5., III.6) 移動ノハ群ヲ造ル。線分ノ大小、線分ノ和、三角形ノ合同等ハ移動ニヨツテ簡單ニ定義サレルシ、種々ノ定理ノ証明モ中等學校デマルノト同ジヤウナ方法デ出来ルノヲ頗ルハヨイ。然レコノデハ公理ヲ擧ゲタゲテ、アトハ割愛スルコトトシ度イ。

van der Waerden ハ合同幾何學ガケテ問題ニシテキタガ、同ジ方法ヲ射影幾何學ニ適用シタラドウカトイフ

問題が自然に起ル訳デアル。

移動ノ概念ニ對應スルモノトシテハ射影変換デアルカラコレヲ Pト名サケテ上ノ公理 III ノヤウナモノヲ造リ、ソレカラ *Desargues* カ *Pascal* 定理ヲ導キ出スコトヲ試ミルノハ面白イコトト思ハレル。組織的ニ研究スルコトハ有志ノ方ニ御願ヒスルコトトシ、氣マダレニ思ヒ付イタコトヲ次ニ述ベテ御参考ニ供シタイ。

直線ガ直線ニ對應スル一對一ノ点変換ヲ射影変換ト名ヅケ次ノ公理ヲ設ケル。(平面ダケ考ヘル)

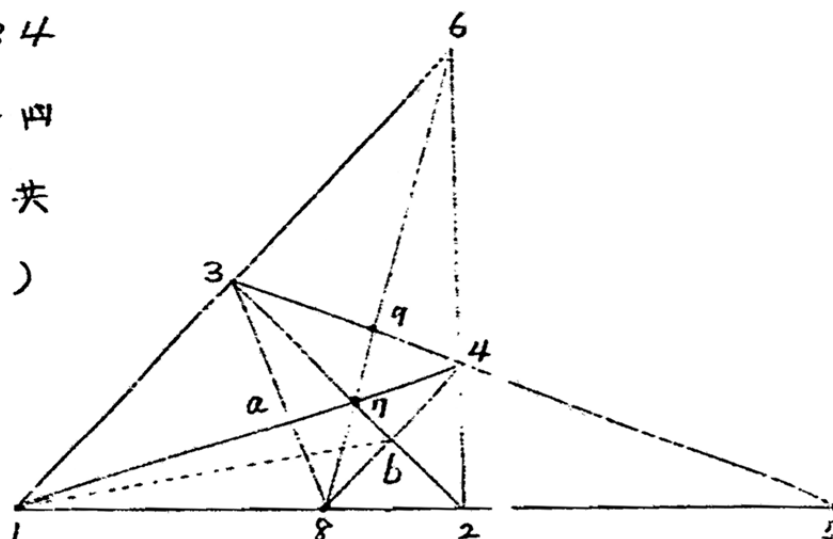
**公理 I** ドノ三点モ共線デナイヤウナ四点(一般ノ位置ニアル四点)ヲ、同性質ノ四点ニ對應サセル射影変換ハ必ズ存在シ、且唯一デアル。

**公理 II** 射影変換ニヨツテ直線上ノ三点ガ不動ナラバ、コノ直線ノドノ点モ不動デアル。

此ノ外ニ射影変換ガ群ヲツクルト云フヤウナ公理ヲ入レトケレバナラナイガ、ソレハ簡單ノタメ省略スル。扱テ公理 II ハ強イ條件デ通常 *Pascal* 定理ト同等ト云ハレテキルモノダカラ、I, II 双方共ニ用ケレバ *Desargues* モ *Pascal* モ出サリデアルコトガ豫想サレル。コニテ考ヘタイノハ 公理 II ヲ假定セズニ公理 I ダケヲ許シタラ如何ナルカ。

ト云フノデアル。

ソコデ先ヅ / 2 3 4  
 テ一般ノ位置ニアル四  
 点 (即チ ドノ三点モ共  
 線デナイヤウ ナ四点)  
 トシ、公理 I ニ  
 ヨツテ



1 2 3 4 7 2 1 4 3

ノ如ク對應スル変換  $P$  ヲ考ヘル。ソウスルト直線 (12) ハ自  
 身ニ、(34) モ自身ニ對應スルカラ (12), (34) ノ交点 5 ハ  
 不動点ニナル。又對應  $P$  ニヨツテ (13)  $\rightarrow$  (24), (24)  $\rightarrow$   
 (13) ナル故、(13) ト (24) トハ入れ換リ、従ツテソノ交  
 点 6 ハ不動点。同様ニ (14), (23) ノ交点 7 モ不動点ニナ  
 ル。ヨツテ直線 (67) ハ不動直線ニナル。( (67) 上ノス  
 マテノ点ガ不動カ否カハ不明)

(12), (67) ガ不動直線デカラ、ソノ交点 8 ハ不動。同様  
 ニ 9 モ不動。

又 (14), (38) ノ交点ヲ  $a$ , (23), (48) ノ交点ヲ  $b$  トスレ  
 バコレヲノ直線ハ入れ換ルカラ。  $a, b$  モ入れ換リニナル。ヨツ  
 テ直線 ( $ab$ ) ハ不動ニナル。ソウスルト ( $ab$ ) ハ点 5 ヲ  
 通テナケレバナラナイコトニナル。デアアル。何者 ( $ab$ ),  
 (12) ノ交点ヲ假ニ  $C$  トスレバ、( $ab$ ) モ (12) モ共ニ不動  
 直線デカラ  $C$  モ不動ニナルコトハ確カデアアルガ、モシ  $C$  ガ  
 ト一致シナケレバ ( $C$  ガ 8 ト一致スルコトハナイノデカラ)

C, 5, 6, 7 は一般ノ位置ニアツテ而モ不動ナル故, 変換  $P$  ハ不動変換トナツテアフ筈デカラデアル。

即チ上圖ノヨリナ圖形ガハ  $a, b, 5$  が共線トナルコトが証明出來タ。コレハ *Desargues* ノ定理ノ特別ナ場合ニ外ナラナイ。

上ノ考ヘヲモ一度ツカフト  $(1b), (2a)$  が  $(67)$  上ヲ交ハルコトが容易ニ証明出來ル。所デ 1, 2, 3, 4 カラ順ニ作圖ヲシテ、最後ニ  $(1b), (2a)$  が  $(67)$  上ヲ交ハル トイフコトヲ公理 I トハ關係ナク改メテ公理ニ入レルナラバ、1234 四點カラマラエル結合ヲ造ツタ點ガ所謂 *Möbius* ノ網ヲ形成スル。トイフコトガ *R. Moufang* ノ研究デ知らレテキレノデ。結局公理 I カラハ *Möbius* ノ網ノ存在ガ分ツタ訳デアル。

然レコレ以上ノコトガ出ルカ否カ私ハ知ラナイノデ考ヘテ頂ケタラ有難イノデアル。*Desargues* ノ定理ハ多分出ナイデアラウ、*Hilbert* 式ノ図形計算ガ出來ルカ否カミ問題デアル。

参考ノタメニ *Moufang* ノ論文ヲアゲルナラバ

*R. Moufang: Zur Struktur der projektiven Geometrie der Ebene (Math. Ann. 105, 1931)*

及ビ引續キ *Math. Ann* = 數個ノ *Ergänzungen* ガ出テキル。モット整頓シタラ分リ易クナリハシマイカト思ハレル。何ニシテモ基礎論ガモット形式的ニナラナケレバ

完全ナモノトハ云ヘナカラウ。